導入保存與品質改善技術之最佳損耗性存貨管理模式

Optimal deteriorating inventory model with preservation technology and quality improvement investments

游兆鵬 林旻緯
德明財經科技大學
流通管理系
jonasyu@takming.edu.tw

摘要

本研究針對損耗性商品於非完美單階製造系統進行檢驗、重工、允許缺貨補貨的情境下，發展一套適用於產業實務的存貨管理模式。同時針對產品的損耗性及生產期間的產品瑕疵率之問題，進行產品保存及品質改善技術等兩項投資，目的在於降低產品損耗率、提高生產良率、縮短交期，以期系統總成本最小化。兩個存貨模式皆透過情境模擬建構數學模型並以 MAPLE 輔助求解，利用最佳化方法求得最佳生產存貨模式及最小生產系統總成本，最後經由數值範例與敏感度分析了解各個參數對本模式的影響，並做出結論、建議以及未來研究方向。

關鍵詞：損耗性、非完美生產、缺貨補貨、保存技術、品質改善

Abstract

In this study, we develop a deteriorating inventory model with non-perfect single-stage manufacturing system inspection, heavy industry, and allow stock shortage. Meanwhile, for the product loss and product during the product defect rate of the problem, the product preservation and quality improvement technology are considered, the purpose is to reduce product loss rate, improve production yield, shorten the delivery period, with a view to the total system cost The inventory models construct the mathematical model through the context simulation and solve with the MAPLE. The optimal production inventory model and the total cost of the minimum production system are obtained by the optimization method. A numerical example is given to validate the results of the inventory model. Sensitivity analysis is presented to understand what the parameters affect the total cost of the system significantly. Finally, the influence, conclusions, suggestions and future research directions are made.

Keywords: Deterioration, Imperfect production, Backorder replenishment, Preservation technology, Quality improvement

* 本研究接受科技部編號：MOST 105-2410-H-147 -009 -MY2 研究計畫經費補助

1. 前言

1.1 研究背景、動機與目的

傳統的經濟生產數量 (Economic Production Quantity, EPQ) 其假設皆建立在完美品質的假設情境下，目前雖仍被廣泛應用，卻不適用於產業實務生產系統的真實情境，乃因製造商不論傳統的製程或現代較複雜先進的科技機器之應用，製程中的在製品或製程結束後的成品皆有可能發生產品品質瑕疵的問題，雖透過嚴格品管能降低瑕疵品的比率，但結果仍無法達到傳統 EPQ 的完美狀態。例如，在先進的紡織產業，製造商為增加產能及較佳品質的產出，引進由電腦操控的機器設備，當生產率增加至某特定水準時，機器當機或損壞的機率便開始增加，這些原因包括生產流程中機器本身的耗損、零件毀損、人員不良的操作等等，會導致產出不符品質規格的產品 (Chiu et al., 2004; Sana, 2010)。然而，因為昂貴原料的輸入，這些不符品質規格的瑕疵品仍具相當的價值。因此，基於成本考量，製造商允許這類瑕疵品進行重工變成良品以供使用。此外產品檢驗的流程是必要的，因為它是取得產品品質表現及生產設備之利用等資訊的重要方式。

2. 文獻探討

(Yong, 2010) 探討製造商在不同時間將損耗性商品銷售至不同市場時，需求函數會隨著時間而改變成一個分段函數，求出其原物料最佳訂購量、訂購週期長度和訂購次數，並計算出此系統最小的總成本。(Yu, 2005) 考量單一損耗性商品，此損耗性服從指數分配。產品在供給之前已進行百分之百的品質檢驗，將篩檢出的不良品全數以低價轉售。由於產品的損耗性和品質瑕疵造成損失並產生缺貨，一般消費者通常會允許部分分批補貨的方式補足缺貨，但若消費者不願意，則會造成供應商銷售的損失。(Sarkar and Moon, 2011) 針對非完美生產流程產品重工的成本，其瑕疵品的壽命隨韋伯分配有著不同的變化，可能造成生產系統中的存貨短缺。其需求模式跟隨常態分配，透過目標函數及利用數值分析結果呈現凹性。(Yu and Yu, 2011) 創造“精確檢驗”的模式，針對非完美檢驗及混合檢驗的政策，考量間隙數、採樣頻率、被判定之瑕疵品進行精確檢驗的比例、未檢驗的產品等為決策變數，以期淨利最大化。

(Chiu, 2010) 針對瑕疵品的重工，認為需考量重工失敗，在初步生產批量中檢驗出的瑕疵品數量為隨機比率。進行重工流程前，報廢品皆已被移除，而重工的流程亦非完美，導致進行重工的單位產品修復失敗。研究結果為凸性，並利用遞迴搜索演算法，求得最佳生產運行時間及生產存貨成本最小之數值。(Taleizadeh et al., 2010) 研究單一生產多項商品的單一機器造成產能受限及瑕疵隨機生產之產量模式。模式允許產品短缺造成缺貨及銷售損失，以及服務比率限制。其模式不允許缺貨，於生產中發現的任何瑕疵品，皆視為報廢品。目的在於發展一個具上述特性之模式決定最佳生產量、可允許之短缺水準、以及每單位產品單位時間的總存貨相關成本最小。建立一套數學演算法及推導方式，求得模式最佳解。並指出，當數值減少或顯著變化的最佳數值限制減少時，從安全水準因素(服務水準)中取得最佳結果是重要的。研究結果顯示，安全因素直接地影響循環週期，且間接地影響訂購數量、缺貨水準、以及目標變數。

(Hsieh and Dye, 2012) 考量保存技術投資金額及補貨排程為決策變數，建構一個損耗率隨時間變化及分批補貨的存貨模式。研究目的為找出最佳補貨及保存技術的投資策略，以期每單位時間的總利潤最大化。在任何既有的保存技術成本，首先證明最佳補貨排程不僅存在且具獨特性，接著透過數值與敏感度分析結果顯示，保存技術成本每單位時間的總利潤為凹函數，存在利潤最大。(Hsieh and Dye, 2013) 延伸傳統 EPQ 模式，針對損耗性商品考量產品需求隨時間變動、補貨率為有限、以及產品損耗率為可控制的情況下，允許生產政策中的保存技術成本為決策變數，進而發展一套生產存貨數學模式。利用傳統粒子群聚演算法 (Particle Swarm Optimization, PSO) 進行編碼解決混合整數之非線性規劃問題。目的為使總生產成本最小化，強調藉由有效率的保存技術投資降低總成本，並找出最佳生產及保存技術投資策略。利用數值範例成功驗證此一模式的有效性。(李旭華、杜振輝、李國樑、劉玉珠，2002) 針對不完美生產系統進行投資於訓練與品質改善之成本效益模式，衡量改善前與後之間的差異與影響並預測投資報酬率。

(Jie Li et al., 2008) 建構與分析投資預算限制下投資報酬率 (Return On Investment, ROI) 最大的存貨模式，以及資本投資於設置與品質上的操作。顯示此 ROI 最大化模式可於存貨減少的情況下被建構，並推導全域下的最佳解。此外，重新擬訂線性化技術 (Reformulation-Linearization Technique, RLT) 的應用結果顯示非凸性最佳化模式可被有效解決，以及 RLT 如何產生較優的結果。例如，投資預算的增減，從根本上轉變投資策略(降低設置成本與品質改善)可能會大幅提高投資報酬率。

3. 建立模式

3.1 參數符號

以下為損耗性商品非完美生產系統進行檢驗、 重工、允許缺貨補貨的存貨模式之參數符號：

P　生產率
D　需求率
F　瑕疵品比例
λ　生產瑕疵率
θ　損耗率
$\beta(\xi)$　保存技術及設備投入後降低的損耗率之幅度
α　保存技術及設備投資金額
η　品質改善投術及設備投資金額
$\psi(\delta)$　品質改善技術及設備投入後降低的生產瑕疵率之幅度
R_d　保存技術及設備投入後的結果損耗率
D_i　品質改善技術及設備投入後的結果生產瑕疵率
I_M　正常生產期間無產品損耗及瑕疵品發生的情況之理想良品存貨
I_{M2}　正常生產期間發生產品損耗，存貨包含一瑕疵比例
I_{M3}　所有瑕疵品重工後所累積的良品存貨水準
I_{M4}　生產停止時，分類出瑕疵品後的良品存貨水準
I_{M5}　因損耗產生的缺貨累積量
I_{MV}　正常生產期間保存技術、品質改善等技術及設備投入後的存貨水準
P_u　單位生產成本
P_d　單位損耗成本
P_h　單位持有成本
P_k　單位設置成本
P_b　單位缺貨成本
P_r　單位重工成本
P_i　單位檢驗成本
P_t　單位保存技術及設備成本
P_q　單位品質改善投術及設備成本
T　存貨週期時間
T_1　正常生產之時間長度：決策變數
T_2　瑕疵品重工之時間長度
T_3　需求使用期間之時間長度
T_4　缺貨期間之時間長度
T_5　補足缺貨進行新的生產之時間長度
TC　單位時間總成本

3.2 研究假設

數學模式的建構與推導依據以下假設：

1. 單一產品單階生產。
2. 生產率大於需求率。
3. 生產率和需求率為一已知且固定之常數。
4. 需求完全滿足，沒有缺貨發生。
5. 品質改善技術及設備投資金額為固定已知常數，投入後無任何瑕疵品或報廢品產生。
6. 保存技術及設備投資金額為固定已知常數。
7. 沒有瑕疵產品發生，故無產品重工問題。
8. 考量商品具有損耗性且此損耗性服從指數分配。
9. 成本參數固定且為已知常數。
10. 損耗率為已知且為常數。
11. 產品檢驗與生產同時進行。
12. 品質改善技術及設備之產品單位投資成本發生在正常生產期間(T_1)。
13. 保存技術及設備之產品單位投資成本發生在正常生產期間(T_1)及需求期間(T_2)。
14. 正常生產期間所產生之產品損耗及生產製程產生之消耗不影響滿足需求數量。
15. 保存技術及品質改善之設備投資成本依據設備攤提計算法中，依設備總使用年限及總產出的數量設定，並將成本平均分攤在每一單位產品上。

3.3 模式推導與分析

圖 1 為損耗性商品在非完美生產系統中進行產品重工及缺貨完全補貨之存貨模式，製造商對單一損耗性商品於單階生產之非完美生產系統執行產品生產計劃，存貨水準I_M為無產品損耗、產品瑕疵與報廢問題的理想存貨。假設生產率為P同時伴隨一固定瑕疵比例F，而瑕疵生產率為λ，需求率為D。

正常生產期間T_1產生的產品損耗率θ為固定已知之常數且比率服從指數分配，期間所產生之報廢品皆視為產品損耗，I_{M2}為包含良品與瑕疵品的最高存貨水準。檢驗於正常生產期間同時進行並分類，並於生產停止時將分類出的瑕疵品自生產存貨中移出並送回原來的生產設備進行重工，此時的生產存貨水準降至為I_{M4}，為正常生產期間的良品存貨量，並假設瑕疵品重工期間所有於正常生產期間的良品存貨I_{M4}皆被完美保存不產生任何損耗。重工生產期間為T_2，其生產率P、損耗率θ與生產設備皆與正常生產期間T_1相同。

假設所有的瑕疵品皆可百分之百進行重工使其恢復與良品相同的品質，重工生產期間亦無瑕疵品發生，因此無需進行產品檢驗，所有重工後的瑕疵品皆視為良品並累積至正常生產期間的良品存貨供需求使用，此時的存貨水準由 I_{M4} 上升至 I_{M3}，為瑕疵品進行重工修復成良品後與正常生產期間的良品存貨之累積，重工停止後即開始供給需求期間 T_3。供給需求期間的損耗率 θ 與正常生產期間 T_1 及重工生產期間 T_2 相同，當需求存貨水準隨著時間慢慢下降到零存貨時開始產生缺貨，進入供給短缺期間 T_4。供給短缺期間允許缺貨累積至 I_{M5} 時即進行新的生產。製造商為補足這些缺貨於是在缺貨補貨期間 T_5 進行新的生產，假設缺貨補貨期間的生產率及生產設備與正常生產期間 T_1 以及瑕疵品重工生產期間 T_2 相同，期間所生產的產品假設皆為良品且無任何產品損耗，因此無產品檢驗、損耗、以及瑕疵品重工問題，所有的缺貨將全數補足無任何良品存貨累積。

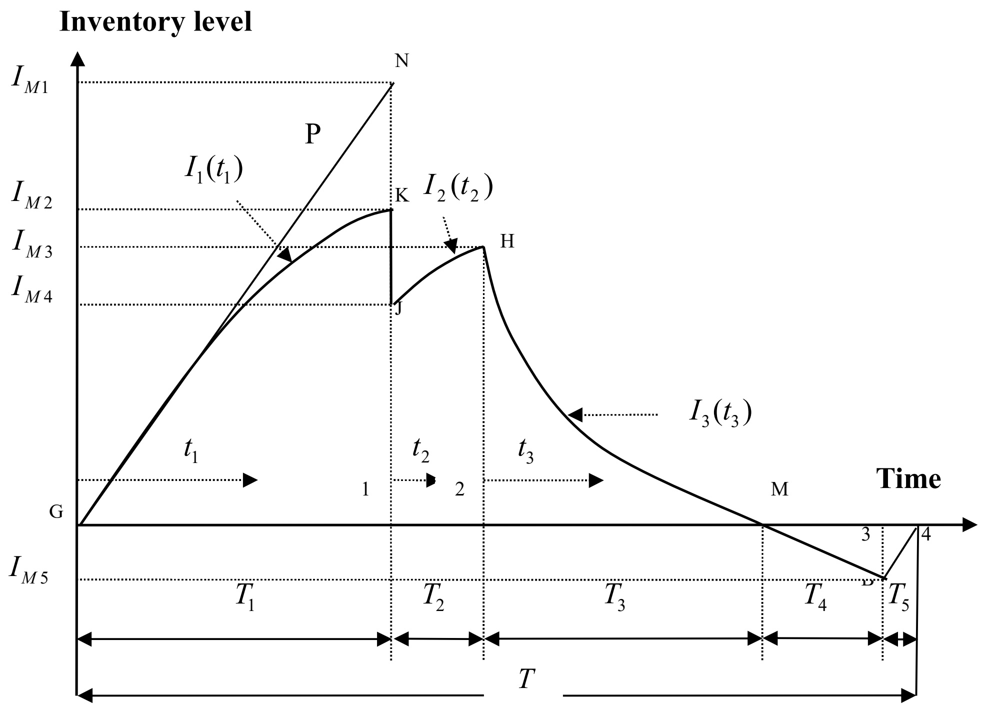

圖 1 產品重工及缺貨補貨之損耗性存貨系統

各期間 T_1、T_2、T_3、T_4、T_5 的存貨水準及產生的相關成本分別計算如下：

在此非完美生產系統中，考量產品的損耗率 θ，則在 T_1 正常生產期間的存貨水準函數可以表示如下：

$$\frac{dI_1(t_1)}{dt_1}+\theta I_1(t_1)=P,\quad 0\le t_1\le T_1 \tag{1}$$

生產期間 T_1 初始生產時存貨水準為 0，當生產停止時的存貨水準為 I_{M2}，因此生產期間 T_1 的邊界值：

$$I_1(0)=0 \tag{2}$$

$$I_1(T_1)=I_{M2} \tag{3}$$

因此，在 T_1 正常生產期間的存貨水準函數為

$$I_1(t_1)=\frac{P}{\theta}\left[1-e^{-\theta t_1}\right],\qquad 0\le t_1\le T_1 \tag{4}$$

而將(3)式代入(4)式，可得

$$T_1=\frac{-1}{\theta}\ln\left[1-I_{M2}\left(\frac{\theta}{P}\right)\right] \quad (1) \tag{5}$$

T_2 為重工生產期間，考量產品的損耗率 θ，其存貨水準函數可以表示如下：

$$\frac{dI_2(t_2)}{dt_2}+\theta I_2(t_2)=P,\ \ 0\le t_2\le T_2 \tag{6}$$

T_2 重工生產期間的初始存貨水準為 I_{M4} ，此存貨水準為 T_1 正常生產期間的良品存貨數量，不包含任何瑕疵品。乃因 T_1 期間生產停止時將分類出的瑕疵品自生產存貨 I_{M2} 中移出進行重工流程，當重工停止時，所有重工後的瑕疵品皆視為良品並累積至 T_1 生產期間原有的良品存貨，累積後的存貨水準為從 I_{M4} 上升至 I_{M3} ，因此 T_2 重工期間的邊界值：

$$I_2(0)=I_{M4}=I_{M2}\cdot(1-F) \tag{7}$$

$$I_2(T_2)=I_{M3} \tag{8}$$

因此，在 T_2 重工生產期間的存貨水準函數為

$$I_2(t_2)=\frac{P}{\theta}+\frac{e^{-\theta\cdot t_2}\left(\theta I_{M2}(1-F)-P\right)}{\theta},\ \ 0\le t_2\le T_2 \tag{9}$$

由於正常生產期間 T_1 的最高存貨水準 I_{M2} 存在一固定瑕疵品比例 F ，因此可得瑕疵品重工的數量為

$$I_{M2}\cdot F=P\cdot T_2 \tag{10}$$

並得到重工期間 T_2

$$T_2=\frac{I_{M2}\cdot F}{P} \tag{11}$$

將(11)式代入(8)式，即可得 I_{M3} 的值， I_{M3} 為瑕疵品重工後的數量與生產期間 T_1 的良品數量兩者所累積的存貨水準，並計算如下：

$$I_{M3}=\frac{P}{\theta}+\frac{e^{-\theta\cdot T_2}\left[\theta I_{M2}(1-F)-P\right]}{\theta} \tag{12}$$

T_3 為供給需求期間，考量產品的損耗率 θ，其存貨水準函數可以表示如下：

$$\frac{dI_3(t_2)}{dt_3}+\theta I_3(t_3)=-D,\ \ 0\le t_3\le T_3 \tag{13}$$

T_3 為供給需求期間初始存貨水準為 I_{M3}，為正常生產期間 (T_1) 的良品存貨以及重工期間 (T_2) 瑕疵品重工後兩者的存貨累積，當供給需求期間停止時的存貨水準為零，因此 T_3 供給需求期間的邊界值：

$$I_3(0)=I_{M3} \tag{14}$$

$$I_3(T_3)=0 \tag{15}$$

因此，考量 T_3 供給需求期間的存貨存在固定已知(6)的損耗率 θ，此損耗率服從指數分配，因此可得到 T_3 之供給需求期間的存貨水準函數為：

$$I_3(t_3)=\frac{-D}{\theta}+\frac{e^{-\theta\cdot t_3}\left(\theta I_{M3}+D\right)}{\theta},\ \ 0\le t_3\le T_3 \tag{16}$$

而由(15)式及(16)式，可得到：

$$T_3=\frac{1}{\theta}\ln\left[\frac{\theta\cdot I_{M3}}{D}+1\right] \tag{17}$$

以及需求期間的最高存貨量 I_{M3} 為：

$$I_{M3}=\frac{P}{\theta}+\frac{e^{-\theta\cdot T_2}\left(\theta I_{M2}(1-F)-P\right)}{\theta} \tag{18}$$

T_4 為供給短缺期間，其存貨水準函數表示如下：(9)

$$I_4(t_4)=-D\cdot t_4,\ \ 0\le t_4\le T_4 \tag{19}$$

T_4 為供給短缺期間，其初始值為 0，供給短缺期間停止時的缺貨水準為 I_{M5} ，為 T_2 重工生產期間及 T_3 供給需求期間因產品損耗產生的缺貨數量之累積，因此 T_4 的供給短缺期間邊界值： (11)

$$I_4(0)=0 \tag{20}$$

$$I_4(T_4)=I_{M5}=-P\cdot T_1+I_{M3} \tag{21}$$

亦可表示為

$$I_4(T_4)=-P\cdot T_1+I_{M3}=-D\cdot T_4 \tag{22}$$

(12)

並得到供給短缺期間 T_4 存貨水準

$$T_4=\frac{\left(P\cdot T_1-I_{M3}\right)+\left(I_{M3}-D\cdot T_3\right)}{D}=\frac{P\cdot T_1-D\cdot T_3}{D} \tag{23}$$

(13)

T_5 為缺貨補貨期間，其存貨水準函數可以表示如下：

$$I_5(t_5)=I_{M5}+P(1-\lambda)\cdot t_5,\ \ 0\le t_5\le T_5 \tag{24}$$

而由假設知生產瑕疵率 $\lambda=\dfrac{I_{M2}\cdot F}{T_2}$ (25)

得到缺貨補貨期間 (14)

$$T_5 = \frac{-I_{M5}}{P(1-\lambda)} \tag{26}$$

得出各期間的存貨水準後即可計算出存貨週期各項成本。存貨週期時間 $T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5$，本研究之系統總存貨成本為考量缺貨之 EPQ 存貨模式，總成本包括生產成本、設置成本、檢驗成本、損耗成本、重工成本、存貨持有成本、以及缺貨成本。檢驗成本與生產數量有關，而瑕疵品進行重工期間亦產生存貨持有成本，計算出週期單位時間總成本 TC：

$$\begin{aligned} TC(T_1) = \frac{1}{T}\Bigg\{ & [P_u \cdot T_1 \cdot P] + 3P_k + P_d\left[\frac{P\cdot\theta\cdot T_1 + Pe^{-\theta T_1} - P}{\theta} + (PT_2 - I_{M2} + 2I_{M3} - DT_3)\right] \\ & + P_i\left(\frac{P + Pe^{-\theta T_1}}{\theta}\right) + (P \cdot T_2 \cdot P_r) + P_h\left[\frac{P\theta T_1 + Pe^{-\theta T_1} - P}{\theta^2} + \frac{1}{\theta}(PT_2 - (I_{M2} - I_{M3})) \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{\theta}(I_{M3} - DT_3)\right)\right] + P_b\left[\frac{(P\cdot T_1 - D\cdot T_3)^2}{2D} + \frac{(P\cdot T_1 - D\cdot T_3)^2}{2P(1-\lambda)}\right]\Bigg\} \end{aligned} \tag{27}$$

本研究目的為使 $TC(T_1)$ 最小化。

3.4 數值範例與敏感度分析

參數數值假設：單位損耗成本為 0.2 元，單位持有成本為 0.5 元，單位檢驗成本為 0.01 元，單位重工成本為 0.15 元，單位生產成本為 10 元，單位設置成本為 1.5 元，單位缺貨成本為 0.3 元，生產率為 100000 件，需求率為 80000 件，瑕疵品比例為 0.01，瑕疵生產率為 0.001，產品損耗率為 0.01。

對總成本正常生產期間長度 T_1 進行一階偏微分，並令 $(d/dT_1)\cdot TC(T_1) = 0$，可求得最佳正常生產期間之時間長度 T_1，可得 $T_1 = 2.1468$。將 T_1 代入至(27)，可求得最小單位時間總成本 $TC^* = 519087.2464$，最後將 T_1 代至正常生產期間之最高存貨水準 I_{M2} 之數學模式，求得最高存貨水準 I_{M2} $I_{M2} = 19787608.531$。得出以上數值後，接著求相對極值。對目標函數 TC 中的決策變數 T_1 進行二次偏微分，將 $T_1 = 2.1468$ 代入後，得到相對極小值 $G = 16412.8554$。證明此目標函數全域存在系統總成本最小值。

接下來選擇參數 P、D、F、θ、P_u、P_d、P_h、P_k、P_r、P_b、P_i，在一次改變一項參數的方式了解該參數對於此模式下成本的影響幅度。各參數數值依正負 30%進行敏感度分析，數值變化如表 1 所示：

表 1 相關參數數值之幅度變化表

參數 \ 幅度	-30%	-20%	-10%	0%	10%	20%	30%
P	70000	80000	90000	100000	110000	120000	130000
D	56000	64000	72000	80000	88000	96000	104000
F	0.007	0.008	0.009	0.01	0.011	0.012	0.013
θ	0.007	0.008	0.009	0.01	0.011	0.012	0.013
P_u	7	8	9	10	11	12	13
P_d	0.14	0.16	0.18	0.2	0.22	0.24	0.26
P_h	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65
P_k	1.05	1.2	1.35	1.5	1.65	1.8	1.95
P_b	0.21	0.24	0.27	0.3	0.33	0.36	0.39
P_r	0.105	0.12	0.135	0.15	0.165	0.18	0.195
P_i	0.007	0.008	0.009	0.01	0.011	0.012	0.013

利用表1參數數值的幅度變化固定其他數值，並根據未導入模式所建構的單位時間總成本數學模式，分別將中心集合所求得的單位時間總成本代入，結果如表2所示。

表 2 相關參數對單位時間總成本(TC)之改變

幅度 / 參數	-30%	-20%	-10%	0%	10%	20%	30%
P	434652.541	466310.229	494247.840	519087.246	541316.169	561325.623	579432.258
D	419135.867	455695.855	488862.496	519087.246	546756.697	572149.261	595564.844
F	518876.239	518946.626	519016.971	519087.246	519157.454	519227.609	519297.663
θ	533616.531	527865.538	523107.592	519087.246	515632.508	512622.684	509970.260
P_u	385525.471	430046.132	474566.718	519087.246	563607.719	608128.074	652648.374
P_d	519064.049	519071.80	519079.526	519087.246	519094.982	519102.729	519110.433
P_h	512780.244	515000.528	517099.868	519087.246	520971.960	522760.859	524460.187
P_k	519086.974	519087.051	519087.149	519087.246	519087.344	519087.442	519087.540
P_b	514933.007	516347.593	517731.759	519087.246	520415.705	521718.583	522997.273
P_r	519086.552	519086.799	519087.020	519087.246	519087.489	519087.715	519084.937
P_i	505535.866	510365.715	514862.890	519087.246	523082.636	526882.189	530511.837

根據表 1 與表 2 中的參數對於損耗性商品在非完美生產系統的單位時間總成本(TC)影響程度及分析敘述如下：

1. 相關性分析

各個參數對於損耗性商品在非完美生產系統的單位時間總成本(TC)之相關性可

分為以下二種類型：

(1) 正相關：P_i 、P_d、P_h、P_b、P_k、P_u、F 、D、P

(2) 負相關： θ、P_r

2. 敏感度差異分析

各參數對於損耗性商品在非完美生產系統的單位時間總成本(TC)之影響程度可

分為三種類別，分別為影響程度在 15%以上歸為高敏感度、影響程度在 5%~15%

歸為中敏感度、以及 5%以下的則歸為低敏感度，結果如下：

(1) 高敏感度參數：P_u 、D、P

(2) 低敏感度參數：P_r、P_k、F、θ、P_i 、P_d 、P_h 、P_b

3.5 導入保存及品質改善技術

本研究延伸先前之研究，假設對非完美生產系統中的損耗性商品之產品損耗率θ及生產瑕疵率 λ ，分別進行保存技術 (Preservation Technology, PT) 及品質改善 (Quality Improvement) 等兩項投資。目的為衡量兩項投資成本的投入，能有效地降低產品損耗率以及解決產品品質瑕疵問題，讓產品在初步生產時間品質即可做到最好，不但解決重工問題，同時提高生產存貨數量滿足全部需求解決缺貨問題。

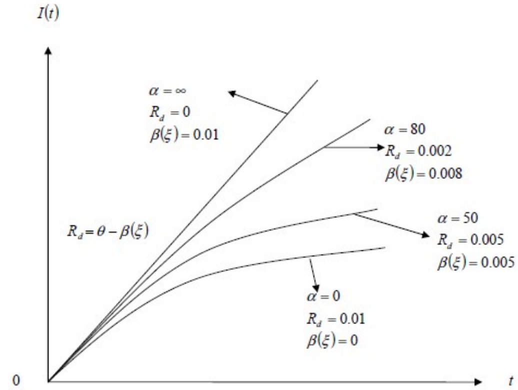

圖 2 生產存貨系統導入保存技術投資不同幅度損耗率減少之差異

說明:$\beta(\xi)$為改善減少幅度,R_d為改善後的損耗率(原始損耗率$\theta = 0.01$)。

假設製造商投資固定資金α進行保存技術的建置，讓產品損耗率θ從過去不可控制的比率能夠降至最低之比率，假設減少的損耗率為$\beta(\xi)$,其中ξ為保存技術或設備的投資成本，投入保存技術投資後的結果損耗率$R_d = \theta - \beta(\xi)$，如圖2。當保存技術成本投入特定金額$\alpha = 80$，則產品損耗率下降至0.002，為製造商最佳的投資結果與選擇，並被製造商所採用。品質改善的部份，在非完美生產系統中存在固定的生產瑕疵率λ，製造商為提升產品品質及良率，投入固定金額η進行品質改善技術或設備的投資，假設減少的產品瑕疵率為$\psi(\delta)$,其中δ為品質改善技術或設備的投資成本，投入品質改善技術或設備後的產品瑕疵率結果$D_i = \lambda - \psi(\delta)$，如圖3，當品質改善技術或設備的成本投入至一定金額後$\eta = 90$，則產品瑕疵率降低至零，不但節省製造商的重工成本同時降低缺貨數量，而交貨時間亦因沒有重工的問題而縮短，為製造商品質改善投資的最佳結果與選擇，並被製造商所採用。雖製造商在期初會因兩項的投資而增加生產成本，然而當製程中的產品損耗率及產品瑕疵率降低時，生產系統中的損耗成本、缺貨成本、設置成本、重工成本、以及持有成本同時也跟著降低，達到生產系統存貨最佳化以及製造商成本最小的目的。

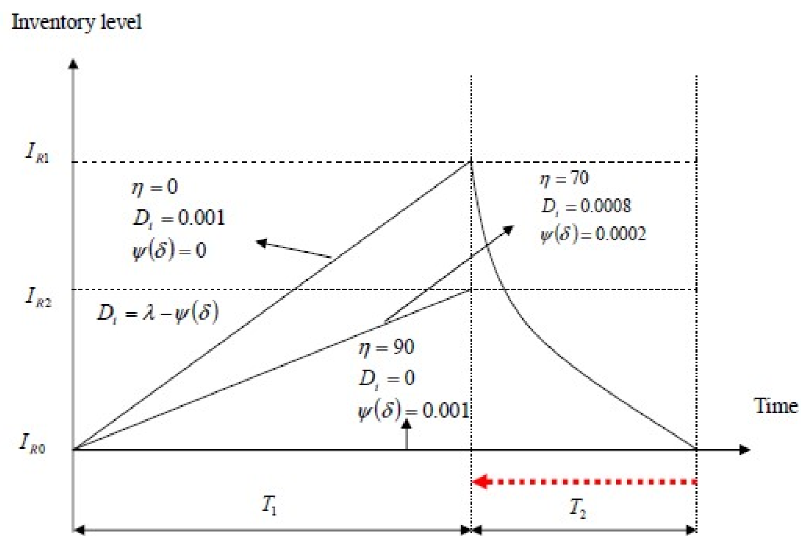

圖 3 生產存貨系統導入品質改善投資後重工時間及瑕疵品數量變化

說明：$\psi(\delta)$為品瑕疵率減少的幅度，D_i為改善後的產品瑕疵率(原始產品瑕疵率為$\lambda = 0.001$)，重工時間和瑕疵品重工數量的變化。

圖 4 為製造商在非完美生產系統損耗產品導入產品保存、品質改善技術與設備投資後的生產存貨系統，紅色虛線為導入後的存貨變化。正常生產期間T_1及供給需求期間T_2的原始損耗率為θ=0.01、生產瑕疵率$\lambda = 0.001$、最高存貨水準為I_{M2}；在製造商投資產品保存技術與品質改善等投資後，假設廠商採用最佳資金投入$\alpha = 80$與改善的結果損耗率降至$R_d = 0.002$；以及品質改善技術的最佳資金投入為$\eta = 90$時，改善後的產品瑕疵率$D_i = 0$，即生產期間無任可產品瑕疵或報廢發生，因此無重工的流程，此時最高存貨水準由原始的I_{M2}提高至I_{MV}。當正常生產期間T_1生產停止時，即開始供給需求期間T_2，供給需求期間存在固定損耗率R_d，並假設需求全數滿足因此無缺貨補貨問題。因此，各期間T_1、T_2的存貨水準及產生的相關成本包含生產成本、設置成本、檢驗成本、損耗成本、存貨持有成本、單位保存

技術及設備成本、單位品質改善投術及設備成本等，並計算出單位時間總成本如下：

$$
\begin{aligned}
TC(T_1) = \frac{1}{T}\Bigg\{ & \left[P_u \cdot T_1 \cdot P\right] + P_k + P_d\left[\frac{P \cdot R_d \cdot T_1 + Pe^{-R_d T_1} - P}{R_d} + \left(I_{MV} - D \cdot T_2\right)\right] \\
& + P_i\left[\frac{P + Pe^{-R_d T_1}}{R_d}\right] + P_h\left[\frac{PR_d T_1 + Pe^{-R_d T_1} - P}{R_d{}^2} + \left(\frac{1}{R_d}\left(I_{MV} - DT_2\right)\right)\right] \\
& + \left(\mathrm{P_r} + P_q\right) \cdot \left[\frac{P + Pe^{-Rd.T_1}}{R_d}\right] + \left[\frac{P}{R_d} + \frac{e^{-R_d \cdot T_1}\left(R_d I_{MV} - P\right)}{R_d}\right] P_t \Bigg\}
\end{aligned}
\tag{28}
$$

本研究目的為使 $TC(T_1)$ 最小化。

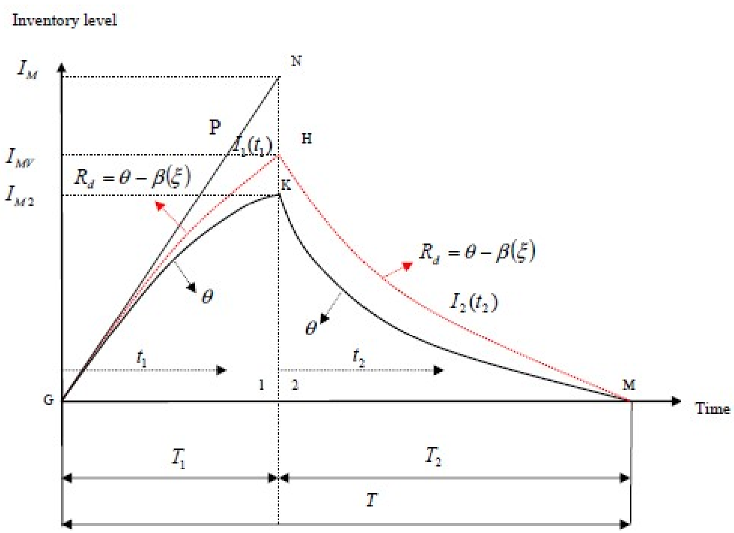

圖 4 導入保存技術、品質改善投資後之存貨系統

3.6 數值範例與敏感度分析

本節以一數值範例來說明本章之數學模式求解過程，並利用數學運算軟體 Maple 作為輔助求解工具，並設定模式相關參數，求得製造商在損耗性商品非完美生產系統中導入保存技術及品質改善投資後的最佳生產存貨數量。

參數數值假設：單位損耗成本為 0.5 元，單位持有成本為 0.1 元，單位檢驗成本為 0.02 元，單位生產成本為 10 元，單位設置成本為 550 元，單位保存技術及設備成本為 0.005，單位品質改善投術及設備成本為 0.009，生產率為 10000 件，需求率為 9500 件，產品損耗率為 0.002。並代入得到：

$$
TC = \frac{1}{T_1 + 0.999}\left[6.05^5 T_1 + 2.5247^8 e^{-0.002T_1} - 2.523^8 + 2.5e^{-0.002T_1}\left(-9981\right)\right]
$$

證明 TC 數學模式為凸函數後，表示此成本模式存在最小值，接下來對總成本之正常生產期間長度 T_1 進行一階偏微分，並令 $d / dT_1 \cdot TC(T_1) = 0$，可求得導入保存技術與品質改善投資後的最佳正常生產期間之時間長度 T_1 如下：

$$
\frac{\partial TC(T_1)}{\partial T_1} = \frac{6.05^5 - 5.0494e^{-0.002T_1}}{T_1 + 0.999} - \frac{6.05^5 T_1 + 2.5247^8 e^{-0.002T_1} - 2.523^8 + 2.5e^{-0.002T_1}\left(-9981\right)}{\left(T_1 + 0.999\right)^2}
$$

得到 $T_1^* = 10.5899$

並將求得 T_1^* 的最佳正常生產期間之時間長度代入，即可求得最小單位時間總成本

$TC^* = 110613.276$

另外將求得的最佳正常生產期間所需的時間長度 T_1^* 代至正常生產期間之最高存貨水準 $\left(I_{MV}\right)$

之數學模式，求得最高存貨水準：

$I_{MV}^{*}=9895214.3751$

得出以上數值後，接著求相對極值G，並對目標函數TC中的決策變數T_1進行二次偏微分，得到

$$\frac{\partial^2 TC(T_1)}{\partial T_1^{\,2}}=\frac{1009.88e^{-0.002T_1}}{T_1+0.999}-\frac{2\left(6.05^5-5.0494^5e^{-0.002T_1}\right)}{\left(T_1+0.999\right)^2}$$

$$+\frac{2\left[6.05^5T_1+2.5247^8e^{-0.002T_1}-2.523^8+2.5e^{-0.002T_1}\left(-9981\right)\right]}{\left(T_1+0.999\right)^3}$$

將$T_1^{*}=10.5899$代入，得到系統總成本相對極小值G = 84.8864

證明此目標函數存在極小值為一凸函數，全域下存在總成本極小值。

接下來對本研究中的參數：P、D、R_d、P_u、P_d、P_h、P_k、P_t、P_q、P_i，在一次改變一項參數的方式來了解該參數對於此模式的總成本影響幅度。各個參數依正負30%進行敏感度分析得出數值變化結果如表3所示：

表3相關參數數值之幅度變化表

幅度 / 參數	-30%	-20%	-10%	0%	10%	20%	30%
P	7000	8000	9000	10000	11000	12000	13000
D	6650	7600	8550	9500	10450	11400	12350
R_d	0.0014	0.0016	0.0018	0.002	0.0022	0.0024	0.0026
P_u	7	8	9	10	11	12	13
P_d	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6	0.65
P_h	0.07	0.08	0.09	0.1	0.11	0.12	0.13
P_k	385	440	495	550	605	660	715
P_t	0.014	0.016	0.018	0.02	0.022	0.024	0.026
P_q	0.0063	0.0072	0.0081	0.009	0.0099	0.0108	0.0117
P_i	0.0035	0.004	0.0045	0.005	0.0055	0.006	0.0065

利用表4參數數值的幅度變化，固定其他數值並根據導入模式所建構的單位時間總成本之數學模式，分別將中心集合代入並求出單位時間總成本，結果如表4所示。

表 4 各相關參數對單位時間總成本(TC)之改變

幅度 / 參數	-30%	-20%	-10%	0%	10%	20%	30%
P	90271.495	97140.579	103003.083	110613.276	117559.790	122050.689	125911.092
D	83678.943	91300.198	100315.181	110613.276	120944.556	129926.354	137569.731
R_d	112161.862	111553.489	111044.668	110613.276	110237.191	109916.412	109639.879
P_u	80924.673	90415.292	99894.850	110613.276	121331.702	130811.260	140301.879
P_d	110585.402	110585.733	110587.724	110613.276	110639.160	110640.598	110641.482
P_h	106166.622	107173.203	108268.275	110613.276	113223.749	115059.930	116221.369
P_k	110611.517	110611.639	110611.739	110613.276	110614.814	110614.902	110615.035
P_t	106841.363	107870.067	108832.402	110613.276	112349.904	113179.504	114042.288
P_q	104905.631	107007.283	108257.213	110613.276	113945.057	116121.817	117305.379
P_i	106321.481	107128.958	108279.336	110613.276	112902.971	114300.850	114776.175

根據表 3 與表 4 的結果顯示各個參數對於損耗性商品在非完美生產系統導入保存技術與品質改善投資後的單位時間總成本(TC)影響程度與分析敘述如下：

1.相關性分析

各個參數對於損耗性商品在非完美生產系統的單位時間總成本(TC)之相關性

可分為二種類型，結果如下：

(1) 正相關：P、D、P_u、P_d、P_h、P_k、P_i、P_q、P_t

(2) 負相關：R_d

3. 敏感度差異分析

各參數對於損耗性商品在非完美生產系統的單位時間總成本(TC)之影響程度可分

為三種類別，分別為影響程度在 15%以上視為高敏感度、5%~15%視為中敏感度、

以及 5%以下則視為低敏感度，結果歸納如下：

(1) 高敏感度參數：P、D、P_u

(2) 中敏感度參數：P_h、P_q

(3) 低敏感度參數：R_d、P_d、P_k、P_i、P_t

4. 結論與未來發展

針對所建構的目標函數及結果顯示，導入保存技術及品質改善後的成本結構優於未導入者，原因如下：

1. 未導入模式的原始損耗率 $\theta = 0.01$，導入保存技術投資後的損耗率 R_d 降低至0.002，根據未導入模式的數值範例與敏感度分析結果顯示原始的損耗率 θ 高度影響生產總成本，而改善後的損耗率 R_d 之敏感度相較未導入模式明顯下降，因此導入保存技術改善後的損耗率 R_d 能有效地降低系統總成本。
2. 未導入模式的原始產品瑕疵比例 $\lambda = 0.01$，導入模式在導入品質改善投資後的產品瑕疵比例為零，因此生產過程中沒有瑕疵品或報廢品，因此沒有瑕疵品重工等相關成本，能有效降低系統總成本。
3. 由於導入保存技術及品質改善等投資後，並沒有發生因產品損耗或報廢所造成的缺貨問題，所有的需求皆全數滿足。因此，無需進行新的生產補足缺貨，明顯縮短生產存貨週期時間並降低系統總成本。
4. 此外由於未導入模式的數值範例無法全數套用到導入模式，乃因導入模式的數值範例中的改善後的損耗率 R_d 之數值需固定為0.002。此外由於整體總成本函數結構的不同，因此針對未導入模式及導入模式的單位總成本的數值範例與敏感度驗證的內容，選擇與 TC 呈現高度正相關的 P 生產率以及單位生產成本 P_u 做為比較基礎。選擇這兩個參數數值的原因，乃因未導入模式的數值範例生產率 $P = 100000$ 為導入模式的生產率 P=10000的十倍，而未導入模式與導入模式的數值範例單位生產成本 P_u 皆為10元。因此，針對未導入模式及導入模式所得到的總成本相對極小值進行比較如下：
未導入模式的總成本相對極小值
G=16412.8554/10=164.1286
導入模式的總成本相對極小值G=84.8864
5. 未導入模式參數數值中的生產率 $P = 100000$ 與需求率 $D = 80000$，相較於導入模式的生產率 $P = 10000$ 與需求率 $D = 9500$，由於生產率大於需求率，相較生產率/需求率的結果分別為1.25及1.053，可知導入模式的生產效率優於未導入模式，乃因導入模式的需求率接近生產率且全數滿足需求無缺貨發生。
6. 另外，從未導入模式以及導入模式的數值範例與敏感度分析的結果建議當單位成本與生產時間呈現負相關時，例如 P_d 單位損耗成本、P_h 單位持有成本、R_d 改善後損耗率等等，可採拉式(Pull)生產以縮短時間降低成本，例如 JIT (Just in time)。此外，與生產總成本呈現高度正相關的參數，例如 P_u 單位生產成本、D 需求率、P 生產率等等，建議可調整這些參數數值。

本研究主要整合損耗性商品在非完美生產系統中允許缺貨補貨的生產存貨模式之相關文獻，並延伸 Dye & Hsieh (2012)以及Hsu, Wee, and Teng(2010)等人的研究，對產品的損耗特性導入保存技術，將不可控制的損耗率透過保存技術投資，使其變成可控制之比率，有效降低產品損耗率，同時提高生產存貨，降低生產總成本。不同於這些作者的是，本研究將保存技術及品質改善之設備投資成本依據設備攤提計算法中，依設備總使用年限及總產出的數量設定，並將成本平均分攤在每一單位產品上，讓模式更貼進實際產業的模式。此外針對產品品質檢驗問題，檢驗與生產同時進行無需花費額外檢驗時間，並針對非完美生產系統的產品瑕疵問題導入品質改善投資，以解決因產品瑕疵問題所造成的額外成本以及缺貨問題，有效降底系統總成本。對目標函數求解的結果，皆經過數值與敏感度分析，以及相對極小值的推導與驗證所建構的數學模式存在最佳解，為凸函數。全域存在極小值，存在最佳生產存貨量以及總成本最小，可為相關產業執行相關生產決策時的重要參考依據。另外，本論文針對非完美單階生產及單一商品進行研究，建

議未來可擴大為多階生產以及多項商品並可考量其它機率分配來進行研究，同時考量全球多數原物料價格會隨季節以及供需的狀況而產生變動，造成價格波動與交期延誤而影響消費者的需求，因此建議可加入價格波動、交期波動以及需求不確定性。

參考文獻

李旭華、杜振輝、李國樑、劉玉珠(2002)，「不完美生產系統之品質改善及訓練與製造時間之成本效益模式」，中華民國品質學會第38屆年會暨第8屆全國品質管理研討會，台北市

Chiu, S.W., Gong, D.C., Wee, H.M., 2004. The effects of random defective rate and the imperfect rework process on the economic production quantity model. Japan. Journal of Industrial and Applied Mathematics, Vol.21, pp.375-389.

Chiu, S.W., 2010. Robust planning in optimization for production system subject to random machine breakdown and failure in rework. Computers & Operations research, Vol.37, pp.899-908.

Li, K., Jo, M., Toshisugu, O., Timothy Van, V., 2008. Inventory and investment in setup and quality operations under return on investment maximization. European Journal of Operational Research, Vol.185, No.2, pp.593-605.

Hsieh, T.P., Dye, C.Y., 2012. An optimal replenishment policy for deteriorating items with effective investment in preservation technology. European Journal of Operational Research, Vol.218, pp.106-112.

Hsieh, T.P., Dye, C.Y., 2013. A production-inventory model incorporatingnthe effect of preservation technology investment when demand is fluctuating with time. Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol.239, pp.25-36.

Sarker, B., Moon, I., 2011. An EPQ model with inflation in an imperfect production system. Applied Mathematics and Computation, Vol. 217, pp. 6157-6167.

Taleizadeh, A.A., Niaki, S.T.A., Najafi, A.A., 2010. Multiproduct single-machine production system with stochastic scrapped production rate, partial backordering and service level constraint. Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 233, pp.1834-1849.

Yu, H.F., Yu, W.C., 2007. An optimal mixed policy of inspection and burn-in and the optimal production quantity. International Journal of Production Economics, Vol.105, No.2, pp.483-491.

Yu, J.C.P. 2005. Optimal ordering policy for a deteriorating item with imperfect quality and partial backordering. Journal of the Chinese Institute of Industrial Engineers, Vol.22, pp.509-529.

He, Y., Lai, K.K., 2010. “An optimal production-inventory model for deteriorating items with multiple-market demand”, European Journal of Operational Research, Vol.203, No.3, pp.593-600